MODEL TEST BACALAUREAT

SUBIECTUL I (30 puncte)

(**5p**) **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_2+a_3=8$ şi $a_2+a_5=12$. Calculaţi suma primilor 10 termeni ai progresiei.

(**5p**) **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x+1$. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

(**5p**) **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3\left(6x-12\right).$$

(**5p**) **4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{1,2,3,\ldots,2021\}$, acesta să fie divizibil cu 5 şi să **nu** fie divizibil cu 10.

(**5p**) **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

(**5p**) **6.** Arătaţi că $\sin(a+b)=1$, ştiind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $a\neq b$ şi $\sin a+\cos a=\sin b+\cos b$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} a^2x-b^2y+z=1\\ \left(a^2+1\right)x-\left(b^2-1\right)y+2z=2\\ \left(a^2+2\right)x-\left(b^2-2\right)y+4z=4\end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Notăm cu $A(a,b)$ matricea sistemului.

(**5p**) a) Arătaţi că $\det(A(a,b))=a^2+b^2$.

(**5p**) b) Arătaţi că sistemul este compatibil, pentru orice numere reale a şi b.

(**5p**) c) Arătaţi că, dacă (x_0,y_0,z_0) este o soluţie a sistemului, atunci

$$x_0+y_0+z_0\neq 2021.$$

2. Pe $\mathbb{R}^*$ definim legea de compoziţie „$*$” prin $a*b=\begin{cases}\dfrac{a}{b}, & \text{dacă } a<0\\ ab, & \text{dacă } a>0\end{cases}$.

(**5p**) a) Demonstraţi că legea „$*$” este asociativă.

(**5p**) b) Demonstraţi că legea „$*$” admite element neutru.

(**5p**) c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia $a*x*a=b$, $(a,b\in\mathbb{R}^*)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^x$.

(**5p**) a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=-1$, situat pe graficul funcţiei.

(**5p**) b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)}\right)^{x}$.

(**5p**) c) Arătaţi că ecuaţia $f\left(x\right)=m$ are exact trei soluţii reale distincte, pentru orice număr real $m\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$, dat de

$$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x,\quad I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}\mathrm{d}x, \forall n\geqslant 1.$$

(**5p**) a) Calculaţi I_3 .

(**5p**) b) Arătaţi că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

(**5p**) c) Arătaţi că numărul $I_0+I_2+I_4+\ldots+I_{2020}$ este iraţional.