ASUPRA UNEI IDENTITĂŢI ALGEBRICE

GEORGE STOICA[1)]

Abstract. We explain the origin of an interesting algebraic identity, and indicate several particular cases.

Keywords: Algebraic identities.
MSC: 97H20

Cu mult timp in urmă, am întâlnit următoarea identitate.

Fie numerele reale $x_1, \dots, x_n$ *şi definim* $\overline{x}_i = \max\{x_1, \dots, x_i\}$ *pentru* $i = 1, \dots, n$. *Atunci*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{x}_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{x}_i (\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i) + \overline{x}_n (x_n - \overline{x}_n). \tag{1}$$

La vremea respectivă am găsit o demonstraţie care permite să arătăm ceva mai mult decât identitatea (1), anume:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{x}_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{x}_i)(\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i) + f(\overline{x}_n)(x_n - \overline{x}_n) \tag{2}$$

pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Întrucât demonstraţia pe care am găsit-o pentru identitatea (2) nu depinde de funcţia f, am înţeles că este posibil sa găsesc o identitate mai generală decât formula (2) *fără nicio funcţie* f. În cele ce urmează voi demonstra o astfel de identitate.

Să considerăm numerele reale $a_0, a_1, \dots, a_n$ şi $y_1, \dots, y_n$ care satisfac condiţia:

$$y_i \neq 0 \Rightarrow a_i = a_{i-1} \text{ pentru } i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Atunci, cu convenţia $y_0 = 0$, avem dubla identitate:

$$a_n y_n = a_{n-1} y_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}(y_i - y_{i-1}). \tag{4}$$

Într-adevăr, o consecinţă a condiţiei (3) este că:

$$a_i y_i = a_{i-1} y_i \text{ pentru } i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Sunt două posibilităţi: formula (5) este evidentă dacă $y_i = 0$, iar dacă $y_i \neq 0$, condiţia (3) implică $a_i = a_{i-1}$.

Prima egalitate din formula (4) rezultă din (5) pentru $i = n$. A doua egalitate din formula (4) rezultă din faptul că membrul drept din (4), după desfacerea parantezelor şi grupări convenabile, este egal cu

$$-a_0 y_0 + (a_0 y_1 - a_1 y_1) + \ldots + (a_{n-2} y_{n-1} - a_{n-1} y_{n-1}) + a_{n-1} y_n;$$

[1)]University of New Brunswick, Saint John, Canada.

primul termen din ultima ecuaţie este egal cu zero deoarece $y_0 = 0$, iar toate parantezele de mai sus sunt egale cu zero conform ecuaţiei (5) pentru $i = 1, \ldots, n-1$. Formula (4) este astfel demonstrată. $\square$

O primă aplicaţie a formulei (4) este să obţinem formula (2). Fie numerele reale $x_1, \ldots, x_n$ şi definim $\bar{x}_i = \max\{x_1, \ldots, x_i\}$ pentru $i = 1, \ldots, n$, împreună cu $x_0 = \overline{x}_0 = 0$. Atunci, considerând $y_i := \overline{x}_i - x_i$ şi $a_i := f(\overline{x}_i)$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$ şi orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, identitatea (4) implică identitatea (2). Într-adevăr, condiţia (3) este satisfăcută deoarece $\overline{x}_i \neq x_i$ implică $\overline{x}_i = x_j$ pentru un indice $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, deci $\overline{x}_i = \overline{x}_{i-1}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Apoi, formula (4) aplicată în acest caz devine:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_n)(\overline{x}_n - x_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_{i-1})(\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1} - x_i + x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x}_i)(\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i - x_{i+1} + x_i), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{x}_i)(\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i) + f(\overline{x}_0)(\overline{x}_1 - \overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{x}_i)(x_{i+1} - x_i) \\ + f(\overline{x}_0)(x_1 - x_0) + f(\overline{x}_n)(\overline{x}_n - x_n). \end{aligned}$$

În fine, folosim că $x_0 = \overline{x}_0 = 0$, $\overline{x}_1 = x_1$ şi obţinem identitatea (2).

A doua aplicaţie a formulei (4) este următoarea: fie numerele reale $x_1, \ldots, x_n$ şi definim $x_i^* = \max\{|x_1|, \ldots, |x_i|\}$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Atunci, pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avem:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*)(|x_{i+1}| - |x_i|) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*)(x_{i+1}^* - x_i^*) + f(x_n^*)(|x_n| - x_n^*). \tag{6}$$

Într-adevăr, definim $x_0 = x_0^* = 0$ şi, considerând $y_i := x_i^* - |x_i|$ şi $a_i := f(x_i^*)$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$, o demonstraţie similară cu cea de mai sus arată că identitatea (4) implică identitatea (6).

În încheiere, notând cu Id_A funcţia identică a unei mulţimi A, indicăm încă doua posibilităţi de aplicare a identităţii (4), anume: fie numerele reale $x_1, \ldots, x_n$ şi

(i) $x_0 = 0$, $y_i = x_i$ (sau $y_i = |x_i|$) şi $a_i = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Id}_{\{x_j=0\}}$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$;

sau

(ii) $x_0 = \overline{x}_0 = \underline{x}_0 = 0$, $y_i = \overline{x}_i - \underline{x}_i$ şi $a_i = f\left(\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Id}_{\{\overline{x}_j = \underline{x}_j\}}\right)$, unde $\underline{x}_i = |\min\{x_1, \ldots .x_n\}|$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$ şi orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.